ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ.

Α2. δ.

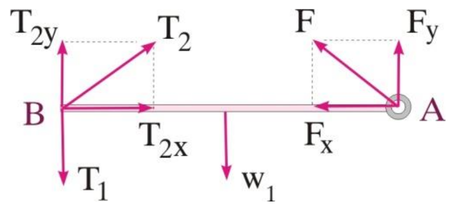
Α3. γ.

Α4. γ.

Α5. α. Λάθος   β. Λάθος   γ. Σωστό   δ. Λάθος   ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).
Η ράβδος δέχεται συνολικά τέσσερις δυνάμεις, δύο τάσεις T_1 και T_2 από τα νήματα, το βάρος της w_1 και την δύναμη F από την άρθρωση.



Από τη συνθήκη $\Sigma\vec{F}_x = 0$, καταλαβαίνουμε ότι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης F πρέπει να έχει φορά προς τα αριστερά, αντίθετη της T_{2x}.
Από τη συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}_{(B)} = 0$ καταλαβαίνουμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της F πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω για να προκαλεί ροπή, αντίθετη της ροπής που προκαλεί το βάρος w_1.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).
Το σύστημα των δύο ράβδων είναι ένα ελεύθερο στερεό. Τα ελεύθερα στερεά περιστρέφονται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Το βαρυτικό πεδίο μέσα στο οποίο κινείται το σώμα είναι ομογενές , οπότε το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο βάρους. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι το βάρος του, του οποίου η ροπή ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με μηδέν. Άρα, αφού δεν ασκείται στο σύστημα ροπή αυτό δεν θα περιστραφεί, αλλά θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.

Β3. Σωστή πρόταση είναι η (α).

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης , $K_{\mu\varepsilon\tau}$, προς την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης , $K_{\sigma\tau\rho}$, είναι ίσος με:

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}$$

Επειδή ο τροχός κυλίεται, ισχύει $\upsilon_{cm} = \omega R$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = 2 \quad \Rightarrow \; K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}K_{\mu\varepsilon\tau}$$

Όμως η συνολική κινητική ενέργεια, Κ, είναι:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = K_{\mu\varepsilon\tau} + \frac{1}{2}K_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow K = \frac{3}{2}K_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{2}{3}K$$

Β4. Σωστή είναι η (γ).

Για τη στιγμιαία ισχύ της F στη στροφική κίνηση ισχύει $P = \tau_F \cdot \omega$.
Η ροπή της F είναι σταθερή και ίση με $\tau_F = F \cdot R$, οπότε για να διπλασιαστεί η ισχύς P αρκεί να διπλασιαστεί η γωνιακή ταχύτητα ω.

Από τη σχέση της στροφικής κινητικής ενέργειας, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, προκύπτει ότι όταν διπλασιάζεται η γωνιακή ταχύτητα η κινητική ενέργεια τετραπλασιάζεται.
Άρα, $K_2 = 4K_1$ και η ζητούμενη αύξηση της κινητικής ενέργεια είναι $3K_1$.

Άρα σωστή είναι η (γ).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος -Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής της που διέρχεται από το άκρο Γ είναι ίση με :

$$I_{O\Lambda(\Gamma)} = I_{\text{Ράβδου}(\Gamma)} + I_{\Sigma_1(\Gamma)}$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το Γ, υπολογίζεται με το θεώρημα του Steiner:

$$I_{\text{Ράβδου}(\Gamma)} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} \Rightarrow I_{\text{Ράβδου}(\Gamma)} = \frac{ML^2}{3} = \frac{3kg \cdot (2m)^2}{3} \Rightarrow$$

$$I_{\text{Ράβδου}(\Gamma)} = 4kgm^2$$

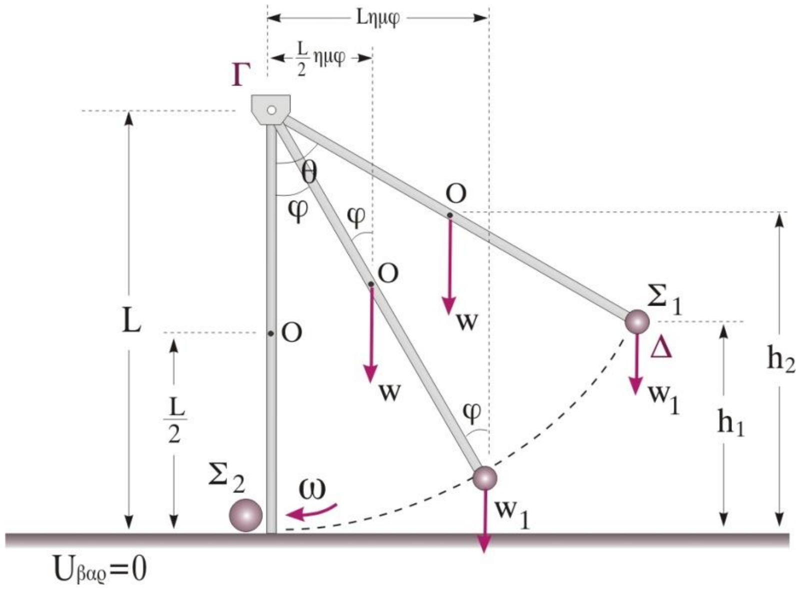
Η ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας m_1 είναι

$$I_{\Sigma_1(\Gamma)} = m_1 L^2 = 1kg \cdot (2m)^2 \Rightarrow I_{\Sigma_1(\Gamma)} = 4kgm^2 .$$

Επομένως η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I_{O\Lambda(\Gamma)} = I_{\text{Ράβδου}(\Gamma)} + I_{\Sigma_1(\Gamma)} = 4kgm^2 + 4kgm^2 \Rightarrow I_{O\Lambda(\Gamma)} = 8kgm^2$$

Γ2. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για το σύστημα, στη θέση που η ράβδος σχηματίζει με τη κατακόρυφη γωνία φ=30^0 γράφεται



$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = I_{O\Lambda(\Gamma)}\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\alpha_\gamma = \frac{Mg\eta\mu\varphi\frac{L}{2} + m_1 g\eta\mu\varphi L}{I_{O\Lambda(\Gamma)}} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{3kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{2} + 1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2m}{8kgm^2} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{25}{8}\frac{rad}{s^2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής (μόνο) της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίσος με:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{(\text{Ράβδ.})} = I_{(\text{Ράβδ})}\alpha_\gamma$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{(\text{Ράβδ.})} = 4kgm^2\cdot\frac{25}{8}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(\text{Ράβδ.})} = 12,5\frac{kgm^2}{s^2}$$

Γ3. Η κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει το σύστημα ράβδος-σώμα Σ_1 ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το σώμα Σ_2 θα βρεθεί με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της κατακόρυφης θέσης:

$$E_{MHX(\tau\epsilon\lambda)} = E_{MHX(\alpha\rho\chi)} \Rightarrow U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του σώματος Σ_1, για τις δυναμικές ενέργειες έχουμε:

$$U_{\tau\epsilon\lambda} = Mg\frac{L}{2} + 0 = 3kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{2m}{2} \Rightarrow U_{\tau\epsilon\lambda} = 30J$$

$$U_{\alpha\rho\chi} = Mgh_2 + mgh_1 = Mg(L - \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta) + mg(L - L\sigma\upsilon\nu\vartheta) = MgL(1 - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta) + mgL(1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta) \Rightarrow$$

$$U_{\alpha\rho\chi} = 3kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 2m(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}) + 1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 2m(1 - \frac{1}{2}) \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} = 45J + 10J \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} = 55J$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(1)** παίρνουμε:

$$U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow 30J + K_{\tau\epsilon\lambda} = 55J + 0 \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 25J$$

Γ4. Για να χαρακτηριστεί μια κρούση ελαστική πρέπει η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση να είναι ίση με την ολική κινητική ενέργεια μετά την κρούση.
Πριν την κρούση, κινητική ενέργεια είχε μόνο το σύστημα ράβδος- $Σ_1$, αφού το $Σ_2$ ήταν ακίνητο. Έτσι, το σύστημα ράβδος- $Σ_1$ - $Σ_2$ πριν την κρούση έχει $K_{ολ(πριν)} = 25J$.
Μετά την κρούση, κινητική ενέργεια είχε μόνο το $Σ_2$ αφού το σύστημα ράβδος- $Σ_1$ ακινητοποιείται. Έτσι, $K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2}m_2υ_2^2$.   **(2)**

Την ταχύτητα $υ_2$ που αποκτά το σώμα $Σ_2$ μετά την κρούση θα την βρούμε με εφαρμογή της διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα ράβδος - $Σ_1$,$Σ_2$ στην κρούση.

$$L_{μετά} = L_{πριν} \Rightarrow m_2υ_2L = I_{ΟΛ(Γ)}ω \Rightarrow υ_2 = \frac{I_{ΟΛ(Γ)}ω}{mL} \quad \textbf{(3)}$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω βρίσκεται από την κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}I_{ΟΛ(Γ)}ω^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 8kgm^2ω^2 = 25J \Rightarrow ω = 2,5\frac{rad}{s}$$

Με αντικατάσταση στη **(3)** παίρνουμε: $υ_2 = \frac{I_{ΟΛ(Γ)}ω}{m_2L} = \frac{8kgm^2\cdot 2,5\frac{rad}{s}}{4kg\cdot 2m} \Rightarrow υ_2 = 2,5\frac{m}{s}$

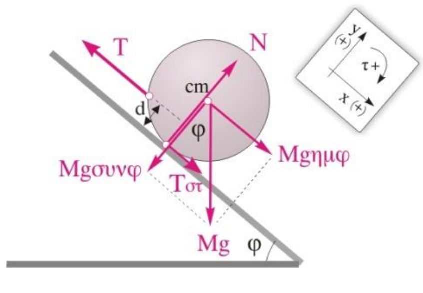
Με αντικατάσταση στην **(2)** παίρνουμε:

$$K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = \frac{1}{2}4kg\cdot\left(2,5\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{ολ(μετά)} = 12,5J$$

Επειδή $K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετά)}$ η κρούση είναι ανελαστική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη σφαίρα ασκούνται οι δυνάμεις:
-το βάρος του σώματος, Mg, που αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες,
- η κάθετη δύναμη στήριξης ,N, από το πλάγιο επίπεδο,
- η τάση του νήματος T και η
- η στατική τριβή, $T_{στ}$, από το πλάγιο επίπεδο.



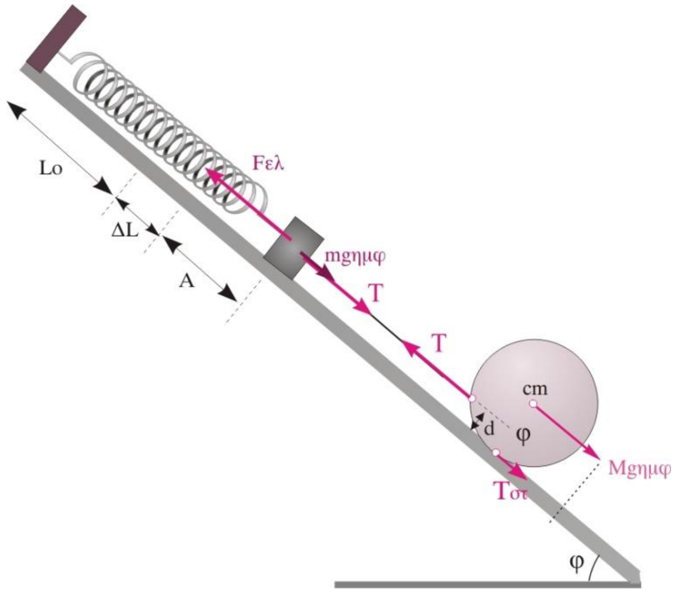
Επειδή η σφαίρα ισορροπεί οι συνθήκες ισορροπίας της γράφονται:

$$\Sigma\vec{τ}_{cm} = 0 \Rightarrow T\frac{R}{2} - T_{στ}R = 0 \ \Rightarrow T_{στ} = \frac{T}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow Mgημφ + T_{στ} = T \xrightarrow{(1)} Mgημφ = \frac{T}{2} \Rightarrow$$

$$T = 2\cdot Mgημφ = 2\cdot 4kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot ημ60^0 \Rightarrow T = 40\sqrt{3}N$$

Δ2. Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ, αποτελεί την ακραία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ, μόλις κοπεί το νήμα. Έστω ΔL η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος στη θέση ισορροπίας της α.α.τ. και Α το πλάτος της α.α.τ.. Από τις συνθήκες ισορροπίας του σώματος Σ στις δύο θέσεις έχουμε:



Αρχική θέση Ισορροπίας σώματος Σ.

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi + T = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi + T = k(\Delta L + A) \qquad \textbf{(2)}$$

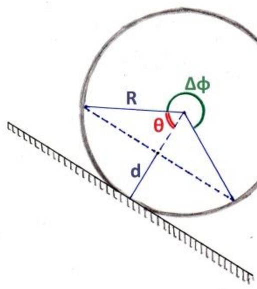
Θέση Ισορροπίας ταλάντωσης:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = k\Delta L \qquad (3)$$

Με αφαίρεση της σχέσης **(3)** από τη σχέση **(2)** υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης.

$$T = kA \Rightarrow A = \frac{40\sqrt{3}\ N}{200N/m} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{5}m$$

Δ3. Όταν κοπεί το νήμα, το σώμα Σ ξεκινά ταλάντωση και η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη. Όταν το σημείο Ρ της σφαίρας βρεθεί πάλι σε απόσταση d από το κεκλιμένο επίπεδο για πρώτη φορά, αυτή θα έχει περιστραφεί κατά γωνία $\Delta\varphi = 2\pi - 2\theta$.



Όμως $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{R/2}{R} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Άρα, $\Delta\varphi = 2\pi - 2\cdot\frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4\pi}{3}$ **(4)**

Η κίνηση της σφαίρας είναι στροφικά ομαλά επιταχυνόμενη , οπότε για τη γωνία στροφής, Δφ, ισχύει:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_\gamma \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{2\Delta\varphi}{\alpha_\gamma} \qquad \textbf{(5)}$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, Δt, το σώμα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση, άρα

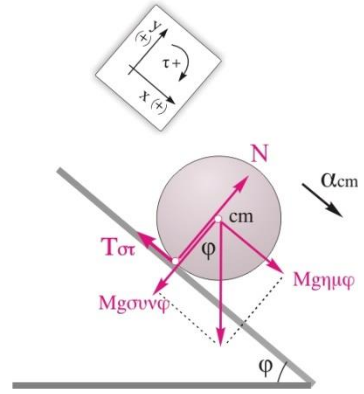
$$\Delta t = T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \qquad \textbf{(6)}$$

Από τη δυναμική μελέτη της κίνησης της σφαίρας θα υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση, α_γ, την οποία θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (5). Από το συνδυασμό των σχέσεων (5) και (6) θα υπολογίσουμε τη μάζα m του σώματος.

Για την κύλιση της σφαίρας στο κεκλιμένο επίπεδο ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση γράφονται αντίστοιχα:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = M\alpha_{cm} \qquad (7)$$

$$\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = \frac{2}{5}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}MR\alpha_\gamma \qquad (8)$$



Επειδή η σφαίρα κυλίεται, ισχύει $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (9)

Η σχέση (8) με τη βοήθεια της (9) γίνεται:

$$T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}MR\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}M\alpha_{cm}$$

Με αντικατάσταση της Τστ που προέκυψε στην (7), παίρνουμε:

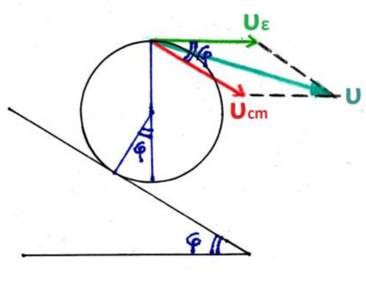
$$Mg\eta\mu\varphi - \frac{2}{5}M\alpha_{cm} = M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{g\eta\mu\varphi}{7/5} = \frac{5\cdot 10m/s^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{25\sqrt{3}}{7}\frac{m}{s^2}$$

Άρα η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας είναι: $\alpha_\gamma = \dfrac{\alpha_{cm}}{R} = \dfrac{\frac{25\sqrt{3}}{7}\frac{m}{s^2}}{\frac{\pi}{7}m} \Rightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{25\sqrt{3}}{\pi}\dfrac{rad}{s^2}$

Οι σχέσεις (5) και (6) έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{2\Delta\varphi}{\alpha_\gamma} \Rightarrow m = \frac{2\Delta\varphi}{\alpha_\gamma}\cdot\frac{k}{4\pi^2} = \frac{2\cdot\frac{4\pi}{3}rad}{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}\frac{rad}{s^2}}\cdot\frac{200\frac{N}{m}}{4\pi^2} \Rightarrow m = \frac{16}{9}\sqrt{3}\,kg$$

Δ4. Η ταχύτητα του ψηλότερου σημείου είναι η συνισταμένη της ταχύτητας του κέντρου μάζας υ_{cm} και της γραμμικής ταχύτητας υ_ε. Οι δύο ταχύτητες όμως έχουν ίσα μέτρα
και η γωνία μεταξύ τους είναι ίση με τη γωνία του κεκλιμένου $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Επομένως από το κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε:



$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_\varepsilon^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_\varepsilon\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} = \upsilon_{cm}\sqrt{3} \qquad (10)$$

Για την ταχύτητα υ_{cm} ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\Delta t \qquad (11)$$

Το χρονικό διάστημα Δt θα τον υπολογίσουμε από τη σχέση (5) λύνοντας ως προς Δt και αντικαθιστώντας τις τιμές των Δφ και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

$$\Delta t^2 = \frac{2\Delta\varphi}{\alpha_\gamma} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta\varphi}{\alpha_\gamma}} = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{4\pi}{3}rad}{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}\frac{rad}{s^2}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\pi^2\sqrt{3}}{3\cdot 25\cdot 3}}s \Rightarrow \Delta t = \frac{4\sqrt{5\sqrt{3}}}{3\cdot 5}s \Rightarrow \Delta t = \frac{4}{5}s$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (11) βρίσκουμε:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\Delta t = \frac{25\sqrt{3}}{7}\frac{m}{s^2}\cdot\frac{4}{5}s \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{20\sqrt{3}}{7}\frac{m}{s}\cdot$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) βρίσκουμε την ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται στο μεγαλύτερο ύψος από το δάπεδο.

$$\upsilon = \upsilon_{cm}\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{7}\sqrt{3}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = \frac{60}{7}\frac{m}{s}.$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Σδρίμας Ιωάννης** - Φυσικός**.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο.**