ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. β.

2. α.

3. δ.

4. α.

5. α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Σ.

ΘΕΜΑ Β

1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο λόγος το περιόδων είναι ίσος με:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}} \text{ ή } \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}}{\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}}$$

Από το σχήμα προκύπτει πως

$$U_{1(max)}=U_{1(max)} \text{ ή } \frac{1}{2}k_1A^2=\frac{1}{2}k_2(2A)^2 \text{ ή } k_1=4k_2$$

Με αντικατάσταση στην αρχική σχέση παίρνουμε: $m_1=m_2$

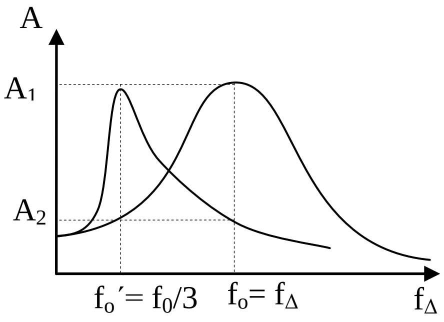
2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση $f_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{k}}$.

Αν αντικαταστήσουμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια, m΄=9m, η νέα ιδιοσυχνότητα θα είναι

$$f_0'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{9m}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } f_0'=\frac{1}{3}f_0$$

Εφόσον αρχικά η συχνότητα του διεγέρτη ήταν ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος είχαμε το φαινόμενο του συντονισμού και το πλάτος ήταν μέγιστο, A_1. Με την αλλαγή της ιδιοσυχνότητας παύει η συχνότητα του διεγέρτη να ισούται με τη νέα ιδιοσυχνότητα, με συνέπεια να παύει το φαινόμενο του συντονισμού, οπότε το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται και γίνεται $A_2 < A_1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



3. Η σωστή απάντηση είναι το β.

Από το σχήμα υπολογίζουμε την περίοδο του διακροτήματος.

$$T_\delta = 0,75\text{s} - 0,25\text{s} \quad \Rightarrow \quad T_\delta = 0,5\,\text{s}$$

Επομένως, η συχνότητα του διακροτήματος είναι: $f_\delta = \dfrac{1}{T_\delta} \quad \Rightarrow \quad f_\delta = 2\,\text{Hz}$

Για τη συχνότητα του διακροτήματος ισχύει: $f_\delta = |f_2 - f_1|$ και $f_2 > f_1$, άρα

$$f_2 - f_1 = 2\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad f_2 - 19\text{Hz} = 2\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad f_2 = 21\,\text{Hz}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ισούται με τη μέση τιμή των ω_1, ω_2 υπολογίζεται ως εξής:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Rightarrow 2\pi\,\overline{f} = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{f} = 20\,\text{Hz}$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Οι δύο ταλαντώσεις είναι της μορφής $x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t)$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$. Επομένως:

$$A_1 = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$$

$$A_2 = \sqrt{3}\,\text{cm}$$

$$\omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$$

Η σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο με ίδια ω είναι απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια ω, της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Επομένως, για την περίοδο της σύνθετης ταλάντωσης, έχουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi} \Rightarrow T = 0,2\,\text{s}$$

β) Για το πλάτος Α της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow A = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2 + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}}\ \text{cm} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{12+3+12\cdot(-\frac{1}{2})}\text{cm} \Rightarrow$$ A = 3 cm.

γ) Για την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως (για $0 \le \varphi_0 < 2\pi\,\text{rad}$) έχουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$ ή $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad}$.

Η τιμή $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad}$ απορρίπτεται διότι η φ_0 πρέπει να είναι μεταξύ των αρχικών φάσεων των αρχικών ταλαντώσεων, επομένως πρέπει $0 \le \varphi_0 < \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$, το οποίο ισχύει για $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$

δ) Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, με αντικατάσταση έχουμε: $x = 3\cdot\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})$.

Η αντίστοιχη εξίσωση της ταχύτητας είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{6})$. Θέτοντας $t_0 = 0$ σ' αυτή την εξίσωση έχουμε: $\upsilon_0 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_{max}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \upsilon_0 > 0$.

Επειδή η ταλάντωση ξεκινά με θετική ταχύτητα, το σώμα φτάνει πρώτα στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = +A$).

Θέτοντας $x = +A = +3\,\text{cm}$ στην εξίσωση $x = 3\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})(\text{cm})$, έχουμε:

$$3 = 3\eta\mu(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow 10\pi t_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$10\pi t_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{k}{5} + \frac{1}{30}$$

Πρέπει: $0 \le t_1 < T \Rightarrow 0 \le t_1 < 0{,}2\text{s} \Rightarrow 0 \le \frac{k}{5} + \frac{1}{30} < \frac{6}{30} \Rightarrow$

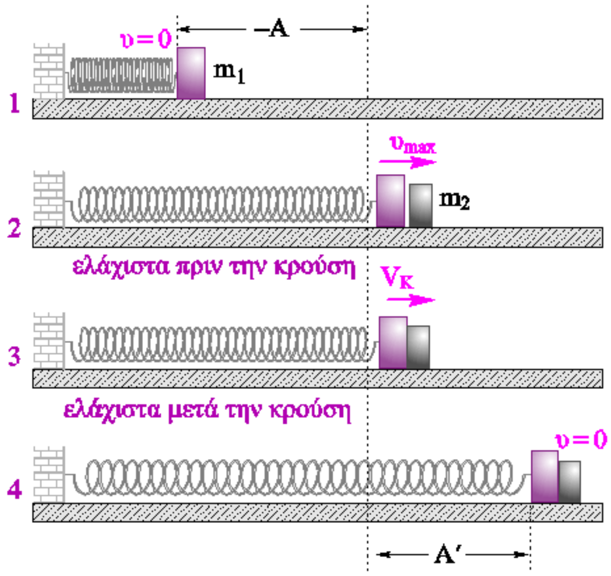
$$-\frac{1}{30} \le \frac{k}{5} < \frac{5}{30} \Rightarrow -\frac{1}{6} \le k < \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0 \text{ ή } k = 1.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα φτάνει σε ακραία θέση της ταλάντωσής του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, θέτουμε $k = 0$ και έχουμε:

$$t_1 = \left(0 + \frac{1}{30}\right)\text{s} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30}\,\text{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

α)



Για τη σύγκρουση των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2)V_\kappa \qquad (1)$$

Η σύγκρουση γίνεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, οπότε η ταχύτητα υ_1 δηλώνει τη μέγιστη ταχύτητα της αρχικής ταλάντωσης, $\upsilon_1 = \upsilon_{max}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας, για την αρχική ταλάντωση, μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της ακραίας θέσης βρίσκουμε την υ_{max} .

$$K_2 = U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{576N/m}{3kg}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{12}m \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\frac{m}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$V_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{3kg \cdot 4m/s}{3kg + 1kg} \Rightarrow V_\kappa = 3\frac{m}{s}$$

β) Η ζητούμενη σχέση στη γενική της μορφή γράφεται:

$$x = A' \cdot \eta\mu(\omega' t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τα A', ω', φ_0

Επειδή το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης παραμένει ίδια με την παλιά, οπότε τη χρονική στιγμή t=0 το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει θετική ταχύτητα.

Αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι:

-η νέα ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, $\varphi_0 = 0$

- η ταχύτητα του συσσωματώματος, $V_\kappa = 3m/s$, αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης.

Η κυκλική συχνότητα της νέας ταλάντωσης είναι:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{576\ N/m}{3kg + 1kg}} \Rightarrow \omega' = 12\frac{rad}{s}$$

Από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας βρίσκουμε το πλάτος της νέας ταλάντωσης:

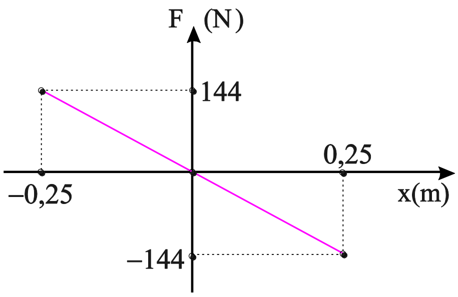
$$V_\kappa = \upsilon'_{max} = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{V_\kappa}{\omega'} = \frac{3m/s}{12rad/s} \Rightarrow \ A' = \frac{1}{4}m = 0,25m$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$x = 0,25 \cdot \eta\mu(12t) \quad (SI) \qquad (3)$$

γ) $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = \Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -576x \quad (SI) \quad \mu\varepsilon \ -0,25m \le x \le 0,25m$

Για $x = 0,25m$ προκύπτει F=144N. Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα.



δ) $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot \Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kx\upsilon \qquad (4)$

Υπολογίζουμε τα x, υ τη χρονική στιγμή που ισχύει $U = \frac{K}{15}$ ή $K = 15U$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση παίρνουμε:

$$U + K = E \Rightarrow U + 15U = E \Rightarrow U = \frac{1}{16}E \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{16}m$$

Επειδή αναφερόμαστε σε στιγμή με θετική απομάκρυνση αποδεκτή τιμή είναι μόνο η $x = +\frac{1}{16}m$.

Η ταχύτητα βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση.

$$U+K=E \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \upsilon=\pm\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}(A^2-x^2)} \Rightarrow$$

$$\upsilon=\pm\sqrt{\frac{576N/m}{3kg+1kg}\cdot\left[(\frac{1}{4}m)^2-(\frac{1}{16}m)^2\right]} \Rightarrow \upsilon=\pm 3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s}$$

Επειδή αναφερόμαστε σε χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα κινείται από θετική απομάκρυνση προς τη θέση ισορροπίας, αποδεκτή τιμή είναι η $\upsilon=-3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) βρίσκουμε:

$$\frac{dK}{dt}=-576\frac{N}{m}\cdot\frac{1}{16}m\cdot(-3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s}) \Rightarrow \frac{dK}{dt}=27\sqrt{15}\frac{J}{s}$$

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Παλόγος Αντώνιος** και **Στεφανίδης Κωνσταντίνος.**